宿題１　　　　　　　　　　提出期限　４月１６日

解答例

問１．黒体輻射においてプランクの分布則（1.2）は振動数νが小さい時および振動数が大きいときそれぞれどのような近似式で表せるか。

$x = h\nu / k_B T$ と置く。　e^x は次のように Taylor 展開される。

$e^x = 1 + x / 1! + x^2 / 2! + \cdots$

ν が非常に小さい時 $(|x| << 1)$ 展開の第二項までをとって (1.2) に代入し

$$\rho_\nu(T)\, d\nu \fallingdotseq \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{1 + x - 1} = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu$$

を得る。この式はレーリー - ジーンズの法則 (1.1) と同じになる。

一方振動数νが十分大きい時には $e^x >> 1$ となるので

$$\rho_\nu(T)\, d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^x - 1} = \frac{8\pi h \nu^3\, d\nu}{c^3} / e^x$$

$$= \frac{8\pi h \nu^3 e^{-h\nu / k_B T} d\nu}{c^3}$$

この式はウイーンの輻射法則と呼ばれる。

問２．授業で導いたウイーンの変位則を初期値 $x_0 = 4.1$ として近似解を求めよ（途中の計算も示すこと）。得られた結果を用いて温度 T = 300 K , T = 5800 K , T = 11000 K の時の分布が最大になる波長を求めよ。

主発点を 4.0 として解いてみる

$$f(4.1) = e^{-4.1} + 4.1 / 5 - 1 = -0.18 + e^{-4.1} = -0.18 + 0.0166 = -0.1634$$

$$f'(4.1) = 0.2 - e^{-4.1} = 0.1834$$

であるから

$$x_1 = 4.1 - \frac{-0.1634}{0.1834} = 4.1 + 0.891 = 4.991$$

$$f(4.991) = e^{-4.991} + 4.991 / 5 - 1 = -0.002 + 0.0068 = 0.005$$

を得る。もう一度ニュウトン法を繰り返して、

$$f'(4.991) = 0.2 - 0.0068 = 0.1932$$

$$x_1 = 4.991 - \frac{0.005}{0.1932} = 4.991 - 0.026 = 4.965$$

を得る。（1.3a ）式に結果を代入して

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{x k_B} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \times 2.998 \cdot 10^{8}}{4.965 \times 1.381 \cdot 10^{-23}}$$

$$\lambda_{max} T = 2.897 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$$

分布最大は長はここに求めた値を使った次式から求める。

$$\lambda_{max} = 2.897 \cdot 10^{-3} / T \quad m$$

300 Kは赤外領域に極大を持ち

$$\lambda_{max} = 2.897 \cdot 10^{-3} / 300 = 9.66 \cdot 10^{-6}\ m = 9.66\ \mu m$$

5800 Kは可視領域に 11000 Kでは紫外領域に極大をもつ。

$$\lambda_{max} = 2.897 \cdot 10^{-3} / 5800 = 5.79 \cdot 10^{-7}\ m = 499\ nm$$

$$\lambda_{max} = 2.897 \cdot 10^{-3} / 11000 = 290 \cdot 10^{-9}\ m = 263\ nm$$

問３．ライマン、バルマー、パッシェン、ブラケット各系列の最も長波長の輝線及び系列限界の波長と波数とを求めよ。

$$\tilde{\nu} = 109680\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \quad cm^{-1}$$ を用いて計算する。

ライマン系列は $n_1 = 1,\ \ n_2 = 2, 3, 4, \cdots, \infty$ であるので最長波長の遷移はもっとも低いエネルギーの $2 \rightarrow 1$ 遷移である。

$$\tilde{\nu} = 109680\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 109680 \frac{3}{1 \times 4} = 82260\ cm^{-1}$$

$\lambda = c / \nu = 1 / \tilde{\nu}\ \ cm = 10^{-2} / \tilde{\nu}\ \ m$ であるからその波長は

$$\lambda = 10^{-2} / 82260 = 1.2157 \cdot 10^{-7}\ m = 121.57\ nm$$

限界波数は $\infty \rightarrow 1$ 遷移であるから

$$\tilde{\nu} = 109680 \frac{1}{1} = 109680\ cm^{-1}$$

限界波長は

$$\lambda = 10^{-2} / 109680 = 91.174 \cdot 10^{-9}\ m = 91.174\ nm$$

ライマン系列は真空紫外部に観測される。

バルマー系列 $n_1 = 2,\ \ n_2 = 3, 4, 5, \cdots, \infty$ の遷移である

最長波長の遷移の波数と波長は同様にして

$$\tilde{\nu} = 109680\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 109680\frac{5}{4\times 9} = 15233.3\ \mathrm{cm}^{-1}$$

$$\lambda = 10^{-2} / 15233.3 = 6.5646\cdot 10^{-7}\ m = 656.46\ nm$$

限界波数と限界波長も同様に

$$\tilde{\nu} = 109680\frac{1}{4} = 27420\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\lambda = 10^{-2} / 27420 = 364.70\cdot 10^{-9}\ m = 364.70\ nm$$

と求まる。この系列は紫外・可視部に観測される。

パッシェン系列は $n_1 = 3,\ \ n_2 = 4, 5, 6, \cdots, \infty$ の遷移
最長波長の遷移の波数と波長は同様にして

$$\tilde{\nu} = 109680\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 109680\frac{7}{9\times 16} = 5331.7\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\lambda = 10^{-2} / 5331.7 = 1.8756\cdot 10^{-6}\ m = 1.8756\mu m$$

限界波数と限界波長は

$$\tilde{\nu} = 109680\frac{1}{9} = 12187\mathrm{cm}^{-1}$$

$$\lambda = 10^{-2} / 12187 = 0.82055\cdot 10^{-6}\ m = 820.55\ nm$$

である。この系列は近赤外領域に観測される。

ブラケット系列は $n_1 = 4,\ n_2 = 5, 6, 7, \cdots, \infty$ であるので

$$\tilde{\nu} = 109680\frac{25-16}{16\times 25} = 109680\frac{9}{400} = 2467.8\ cm^{-1}$$

$$\lambda = 10^{-2} / 2467.8 = 4.0522\cdot 10^{-4}\ cm = 4.0522\mu m$$

限界波数と限界波長は

$$\tilde{\nu} = 109680\frac{1}{16} = 6855.0\ cm^{-1}$$

$$\lambda = 10^{-2} / 6855.0 = 1.4588\cdot 10^{-6}\ m = 1.4588\ \mu m$$

である。この系列は赤外~近赤外領域に観測される。