宿題１１　　　　　　解答例　問２解答修正あり

問１．ロドリゲスの公式から $P_l(x)$ を求め次に示すルジャンドル陪関数を用いて $l=0$ から３までの $P_l^{|m|}(x)$ を求めよ。

$$P_l^{|m|}(x) = (1-x^2)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x)$$

また次の循環式が成り立つことをチェックせよ。

$$(2l+1)x\,P_l^{|m|}(x) = (l-|m|+1)\,P_{l+1}^{|m|}(x) + (l+|m|)\,P_{l-1}^{|m|}(x)$$

$l=0,\ m=0$　$P_0(x) = \frac{1}{2^0\,0!}\frac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0 = 1$

$l=1,\ m=0$　$P_1(x) = \frac{1}{2^1\,1!}\frac{d}{dx}(x^2-1) = x$

$m=1$　$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}P_1(x) = (1-x^2)^{1/2}$

$l=2$

$m=0$　$P_2(x) = \frac{1}{2^2\,2!}\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2 = \frac{1}{8}\frac{d}{dx}4x(x^2-1) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$m=1$　$P_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}P_2(x) = 3x(1-x^2)^{1/2}$

$m=2$　$P_2^2(x) = (1-x^2)\frac{d}{dx}3x = 3(1-x^2)$

$l=3$

$m=0$　$P_3(x) = \frac{1}{2^3\,3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^2-1)^3 = \frac{1}{48}\frac{d^2}{dx^2}6x(x^2-1)^2$

$= \frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}(x^5-2x^3+x) = \frac{1}{8}(20x^3-12x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$m=1$　$P_3^1(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}P_3(x) = (1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$= (1-x^2)^{1/2}(5x^2-1)\frac{3}{2}$

$m=2$　$P_3^2(x) = (1-x^2)\frac{d}{dx}(5x^2-1)\frac{3}{2} = (1-x^2)\,15x$

$m=3$　$P_3^3(x) = (1-x^2)^{3/2}\frac{d}{dx}15x = 15(1-x^2)^{3/2}$

循環式のチェック

$m=0$ の時　$P_{l+1}(x) = \frac{(2l+1)x\,P_l(x) - l\,P_{l-1}(x)}{l+1}$

$l=1$　$P_2 = \frac{3x\,P_1 - P_0}{2} = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$l=2 \quad P_3 = \dfrac{5x P_2 - 2 P_1}{3} = \dfrac{1}{6}\{5x(3x^2-1)-4x\} = \dfrac{5x^3-3x}{2}$

$m=1$ の時　$P_{l+1}^1(x) = \dfrac{(2l+1)x P_l^1(x) - (l+1) P_{l-1}^1(x)}{l}$

$l=1 \quad P_2^1 = 3x P_1^1 - 2 P_0^1 = 3x(1-x^2)^{1/2}$

$l=2 \quad P_3^1 = \dfrac{5x P_2^1 - 3 P_1^1}{2} = \dfrac{(5x\,3x-3)(1-x^2)^{1/2}}{2} = \dfrac{3(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}}{2}$

$m=2$ の時　$P_{l+1}^2(x) = \dfrac{(2l+1)x P_l^2(x) - (l+2) P_{l-1}^2(x)}{l-1}$

$l=2 \quad P_3^2 = 5x P_2^2 - 4 P_1^2 = 15x(1-x^2)$

$l=3 \quad P_4^2 = \dfrac{7x P_3^2 - 5 P_2^2}{2} = \dfrac{15(7x^2-1)(1-x^2)}{2}$

$m=3$ の時　$P_{l+1}^3(x) = \dfrac{(2l+1)x P_l^3(x) - (l+3) P_{l-1}^3(x)}{l-2}$

$l=3 \quad P_4^3 = 7x P_3^3 - 6 P_2^3 = 105x(1-x^2)^{3/2}$

問２．ロドリゲスの公式から次の関係が成り立つことを示せ。

$$(2l+1) P_l(x) = \frac{d}{dx}(P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x))$$　及び

$$(l+1) P_l(x) = \frac{d}{dx} P_{l+1}(x) - x\frac{d}{dx} P_l(x)$$

規格化定数を $N_l = \dfrac{1}{2^l\ l!}$ と取ると $N_l = 2(l+1) N_{l+1}$ であることに注意して

$$\frac{d}{dx} P_{l+1}(x) = N_{l+1}\frac{d}{dx}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}(x^2-1)^{l+1}$$

$$= N_{l+1}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} 2x(l+1)(x^2-1)^l$$

$$= 2(l+1)N_{l+1}\frac{d^l}{dx^l}\{x(x^2-1)^l\}$$　この行を削除して次行に置き換える

$$= 2(l+1)N_{l+1}\frac{d^l}{dx^l}\frac{d}{dx}\{x(x^2-1)^l\}$$

$$= N_l\frac{d^l}{dx^l}\{(x^2-1)^l + x2xl(x^2-1)^{l-1}\}$$

$$= P_l(x) + N_l\frac{d^l}{dx^l}\{2l(x^2-1)(x^2-1)^{l-1} + 2l(x^2-1)^{l-1}\}$$

$$= P_l(x) + 2l P_l(x) + N_{l-1}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^{l-1}$$

$$= (2l+1)P_l(x) + \frac{d}{dx}P_{l-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}P_{l+1}(x) = N_{l+1}\frac{d}{dx}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}(x^2-1)^{l+1}$$

$$= N_{l+1}\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}2x(l+1)(x^2-1)^l$$

$$= 2(l+1)N_{l+1}\frac{d^l}{dx^l}\frac{d}{dx}\{x(x^2-1)^l\}$$

$$= N_l\frac{d^l}{dx^l}\{(x^2-1)^l + x\frac{d}{dx}(x^2-1)^l\}$$

$$= P_l(x) + N_l\frac{d^l}{dx^l}\{x\frac{d}{dx}(x^2-1)^l\}$$

$$= P_l(x) + N_l\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\{\frac{d}{dx}(x^2-1)^l + x\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^l\}$$

$$= 2P_l(x) + N_l\frac{d^{l-2}}{dx^{l-2}}\frac{d}{dx}\{x\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^l\}$$

もう $l-1$ 回微分すると

$$= 2P_l(x) + (l-1)P_l(x) + N_l\frac{d^0}{dx^0}\{x\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}}(x^2-1)^l\}$$

$$= (l+1)P_l(x) + x\frac{d}{dx}P_l(x)$$

問３．次回