宿題１２　　　　　　解答例

問１．宿題１１の問１は先週示した。宿題１１の問３は

$P_l\,(x)$ の直交性を求めたと同じようにして $P_l^{\,|m|}(x)$ の直交性を示しなさい。

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP(x)}{dx}\right\}+\beta P(x)-\frac{m^2}{1-x^2}P(x)=0 \qquad (1)$$

(1) 式より次の２式を得る。

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_l^{\,m}(x)}{dx}\right\}+l\,(l+1)\,P_l^{\,m}(x)-\frac{m^2}{1-x^2}P_l^{\,m}(x)=0 \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n^{\,m}(x)}{dx}\right\}+n\,(n+1)\,P_n^{\,m}(x)-\frac{m^2}{1-x^2}P_n^{\,m}(x)=0 \qquad (3)$$

(2) 式に $P_n^{\,m}(x)$ を、(3) 式に $P_l^{\,m}(x)$ を掛けて引くと

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_l^{\,m}(x)}{dx}\right\}P_n^{\,m}(x)-\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_n^{\,m}(x)}{dx}\right\}P_l^{\,m}(x)$$
$$+\left\{l\,(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}-n\,(n+1)+\frac{m^2}{1-x^2}\right\}P_l^{\,m}(x)\,P_n^{\,m}(x)=0 \qquad (4)$$

が得られる。ここで多項式の積は順序を変えても結果の式は変わらないので

$P_l^{\,m}(x)\,P_n^{\,m}(x)=P_n^{\,m}(x)\,P_l^{\,m}(x)$ を用いた。

(4) 式をー１から１まで積分して（部分積分を用いると）

$$\left[(1-x^2)\frac{dP_l^{\,m}(x)}{dx}P_n^{\,m}(x)-(1-x^2)\frac{dP_n^{\,m}(x)}{dx}P_l^{\,m}(x)\right]_{-1}^{1}$$
$$-\int_{-1}^{1}\left\{(1-x^2)\frac{dP_l^{\,m}(x)}{dx}\frac{dP_n^{\,m}(x)}{dx}-(1-x^2)\frac{dP_n^{\,m}(x)}{dx}\frac{dP_l^{\,m}(x)}{dx}\right\}dx$$
$$+\{l\,(l+1)-n\,(n+1)\}\int_{-1}^{1}P_l^{\,m}(x)\,P_n^{\,m}(x)\,dx=0$$

となるがこの１行目の式は項 $(1-x^2)$ を含むのでゼロとなる。２行目の積分の中は同じ多項式の積となるのでこれもゼロである。従って

$$\{l\,(l+1)-n\,(n+1)\}\int_{-1}^{1}P_l^{\,m}(x)\,P_n^{\,m}(x)\,dx=0$$

となり、 $l\neq n$ の時には

$$\int_{-1}^{1}P_l^{\,m}(x)\,P_n^{\,m}(x)\,dx=0 \qquad l\neq n$$

となり、直交性が示せた。

問２．角運動量の上昇演算子$\hat{L}_+$及び下降演算子$\hat{L}_-$を極座標表示せよ。
得られた結果を元に $m > 0$ として次の関係を示せ。

$$\hat{L}_+ Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\; Y_l^{m+1}(\theta,\phi)$$

(7) 式を求めるときに得た次の関係式を用いると良い。

$$(1-x^2)\frac{d^{m+1}P_l(x)}{dx^{m+1}} - 2mx\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$
$$= -\{l(l+1) - m(m-1)\}\frac{d^{m-1}P_l(x)}{dx^{m-1}} \qquad (7a)$$

解答例

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$
$$= i\hbar(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}) \pm \hbar(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi})$$
$$= \pm\hbar(\cos\phi \pm i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + i\hbar\cot\theta(\cos\phi \pm i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}$$
$$= \hbar e^{\pm i\phi}(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$\hat{L}_+ Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar e^{i\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_l^m(\theta,\phi) + i\hbar e^{i\phi}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}Y_l^m(\theta,\phi)$$

ここで$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{dx} = -(1-x^2)^{1/2}\frac{d}{dx}$ であることまた

$$Y_l^m(\theta,\phi) = N_{lm}P_l^m(x)\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$N_{lm} = (-1)^m\left[\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2} \qquad m > 0$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$ とから第１項は

$$\hbar e^{i\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}Y_l^m(\theta,\phi) = -\hbar e^{i\phi}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}N_{lm}P_l^m(x)\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$
$$= -\hbar N_{lm}\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$
$$= -\hbar N_{lm}\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l(x)$$

$$+\frac{m}{2}(-2x)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\}$$

$$= -\hbar N_{lm}\{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l(x)$$

$$-mx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)\}\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= -\hbar N_{lm}\{P_l^{m+1}(x)-\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}P_l^m(x)\}\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

第２項は

$$\hbar e^{i\phi} i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}Y_l^m(\theta,\phi) = i\hbar e^{i\phi}\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}N_{lm}P_l^m(x)\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= -\hbar\frac{m\,x}{(1-x^2)^{1/2}}N_{lm}P_l^m(x)\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

よって

$$\hat{L}_+Y_l^m(\theta,\phi) = -\hbar N_{lm}\{P_l^{m+1}(x)-\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}P_l^m(x)\}\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$-\hbar\frac{m\,x}{(1-x^2)^{1/2}}N_{lm}P_l^m(x)\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= -\hbar N_{lm}P_l^{m+1}(x)\frac{e^{i(m+1)\phi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= -\hbar N_{lm}Y_l^{m+1}(\theta,\phi)\,/\,N_{l\,m+1}$$

N_{lm} と N_{lm+1} とは符号が異なるので

$$= \hbar\left[\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}/\left[\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m-1)!}{(l+m+1)!}\right]^{1/2}Y_l^{m+1}(\theta,\phi)$$

$$= \hbar\left[\frac{(l-m)!\,(l+m+1)!}{(l+m)!\,(l-m-1)!}\right]^{1/2}Y_l^{m+1}(\theta,\phi)$$

$$= \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,Y_l^{m+1}(\theta,\phi)$$

問３．l＝２の状態の角運動量ベクトルＬとそのｚ成分Ｌｚの関係を図示しなさい。

$\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}+1)\hbar^2$ より $|\boldsymbol{L}| = \sqrt{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}+1)}\,\hbar = \sqrt{2\cdot 3}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar$ であり、$\boldsymbol{L}_z = \boldsymbol{m}\hbar$ で $\boldsymbol{m}$ は５通りある。