宿題２　　　　　　　提出期限　４月２３日

問１．水素のｎ番目のボーア軌道に居る電子の速度は $v = e^2 / 2\varepsilon_0 nh$ で与えられることを示せ、また最初の３つのボーア軌道に居る電子の速度とド・ブローイ波長を計算せよ。

１．アインシュタインの光量子論より光子の波長は $\lambda = h / p$ で与えられる。電子のド・ブロイ波長はこれより　$\lambda = h / m_e v$　(1)　として与えられる。

２．ボーアの整合条件は　$2\pi r = n\lambda$　(2)　であるので (1) と (2) とより角運動量の量子化が得られる。　$m_e v r = nh / 2\pi = n\hbar$　(3)

３．クーロン力と遠心力の釣り合い条件は次のようになる。

$$f = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \qquad (4)$$

(4) に (3) の v を代入すると r が不変定数で求められる。

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m_e n^2 h^2}{r\, m_e^2 (2\pi)^2 r^2} \quad \text{より} \quad r = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_e e^2} \qquad (5)$$

(3) に (5) を代入して

$$v = \frac{nh}{2\pi r m_e} = \frac{nh\pi m_e e^2}{2\pi m_e \varepsilon_0 h^2 n^2} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh} \qquad (6)$$

(1) に (6) の v を代入するとド・ブロイ波長は

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h\, 2\varepsilon_0 nh}{m_e e^2} = \frac{2\varepsilon_0 nh^2}{m_e e^2} \qquad (7)$$

速度とドブロイ波長は $n = 1$ とおいて

$$v_1 = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} = \frac{(1.602\times10^{-19})^2}{2\times8.854\times10^{-12}\times6.626\times10^{-34}} = \mathbf{2.187}\times10^6\ m/s$$

$v_n = v_1 / n$　$n = 2$，３ であるから

$v_2 = 1.094\times10^6\ m/s$　　$v_3 = 0.729\times10^6\ m/s$

ド・ブロイ波長は 得られた速度を用いて (1) より

$$\lambda_1 = \frac{h}{m_e v_1} = \frac{6.626\times10^{-34}}{9.109\times10^{-19}\times2.187\times10^6} = 0.3326\times10^{-9} = 333\ pm$$

$\lambda_n = n\lambda_1$ より $\lambda_2 = 665\ pm$　$\lambda_2 = 997\ pm$ を得る。

問２．原子番号 z の核のボーアの式を $\tilde{\nu}$ について導け。He^+ イオンの基底状態にある電子の運動エネルギー（Ｊおよび eV 単位）を計算せよ。**n=4** の準位にそれより高い準位から遷移する時の限界波長と

最長波長を求めよ。

ここでは問１の１．，２．は同じで３．の釣り合いの力が異なる。

$$f=\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{m_e v^2}{r}$$

問１と同じようにして半径を求める。

$$\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{m_e n^2\hbar^2}{r m_e^2 r^2}$$ より $$r=\frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{m_e ze^2}$$ と求まる。

ポテンシャルエネルギーも z 倍になる。電子の全エネルギーは

$$E=KE+V(r)=\frac{1}{2}m_e v^2-\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ 釣り合いの式から

$$E=\frac{1}{2}\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$ が得られる、これに上で求めた r を入れると

$$E_n=-\frac{m_e z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}\qquad n=1,2,3,\cdots$$

となる。これにボーアの振動数条件 $\Delta E=h\nu=hc\tilde{\nu}$ を用いると

$$\tilde{\nu}=\Delta E/hc=\frac{m_e z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 ch^3}\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)=R_\infty z^2\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

運動エネルギーは釣り合いの式から

$$KE=\frac{ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}=\frac{m_e z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2}$$

$z=2$，$n=1$ と置き運動エネルギーは

$$KE=\frac{m_e z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}=\frac{9.109\times10^{-31}\times2^2(1.602\times10^{-19})^4}{8(8.854\times10^{-12})^2\times(6.626\times10^{-34})^2}=\mathbf{8.716}\times10^{-18}\ J$$

$$=8.716\times10^{-18}/1.602\times10^{-19}=\mathbf{54.41}\ eV$$

$$\tilde{\nu}=R_\infty z^2\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)=1097374\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$ より

$\tilde{\nu}_\infty=109737\times4/16=27434.3\ cm^{-1}$　$\lambda_\infty=10^{-2}/27434.3=\mathbf{364.5}\times10^{-9}\ m$

$\tilde{\nu}_l=109737\times4\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{25}\right)=9876.33\ cm^{-1}$　$\lambda_l=10^{-2}/9876.33=\mathbf{1012.5}\times10^{-9}\ m$

問３．$x(t)=\cos\omega t$ が振動数 $\nu=\omega/2\pi$ で振動することを示し、$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ も同じ振動数 $\omega/2\pi$ で振動することを証明せよ。

$\theta=\omega t$ と置いて $\cos\theta$ の周期性は 2π で有るから１周期にかかる時間を T とすると

$\theta=2\pi=\omega T$　振動数は１秒間に何回繰り返しが有るかだから

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ が得られる。

$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\}$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\{\sin\phi\cos\omega t + \cos\phi\sin\omega t\}$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\phi)$$

と成るのでこの波もまた 2π 周期で繰り返されるので $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ で振動することになる。位相角は $\tan\phi = \frac{A}{B}$ で得られる。

問４．変位 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \phi_n)\sin\frac{n\pi x}{L}$ が次の古典的波動方程式を満たすことを示せ。

$$\partial^2 u / \partial x^2 = (1/v^2)\,\partial^2 u / \partial t^2$$

波動方程式の両辺をそれぞれ求めて等しくなることを示せばよい

$$左辺 = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t+\phi_n)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t+\phi_n)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t+\phi_n)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(-\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$右辺 = \frac{\partial^2 u(x,t)}{v^2\partial t^2} = \frac{\partial^2}{v^2\partial t^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t+\phi_n)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{1}{v^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega_n t+\phi_n)$$

$$= \frac{1}{v^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}(-\omega_n^2)\cos(\omega_n t+\phi_n)$$

（2.26）式より $\omega_n = \frac{n\pi v}{L}$ であることを用いると

$$= \frac{1}{v^2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\left(-\left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2\right)\cos(\omega_n t+\phi_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)\cos(\omega_n t+\phi_n) \quad = 左辺$$

となるので古典的 波動方程式を満たすことが示された。