宿題３　　　　　　　　提出期限　４月３０日

問１．$\mathbf{x}$ 方向に進む波を $\psi = A\exp[\,i\,(k\,x-\omega\,t\,)]$ とするとこの波は $\hat{p}_x$ ，$\hat{p}_x{}^2$ 及びエネルギー演算子 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ の固有関数であるか否かを調べよ。

解答例

固有値を持つことを示せばよい。

$$\hat{p}_x\,\psi = -\,i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\,A\exp[\,i\,(k\,x-\omega\,t\,)]$$
$$= -\,i\hbar\,(i\,k)\,A\exp[\,i\,(k\,x-\omega\,t\,)] = k\,\hbar\,\psi$$

上の答を利用して求める

$$\hat{p}_x{}^2\,\psi = \hat{p}_x\,(\,\hat{p}_x\,\psi) = \hat{p}_x\,k\,\hbar\,\psi = k\,\hbar\,\hat{p}_x\,\psi$$
$$= k\,\hbar\,k\hbar\,\psi = (k\,\hbar)^2\,\psi$$

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi = i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,A\exp[\,i\,(k\,x-\omega\,t\,)]$$
$$= i\hbar\,(\,-\,i\,\omega)\,A\exp[\,i\,(k\,x-\omega\,t\,)] = \hbar\,\omega\,\psi$$

となってそれぞれ固有値をもつので固有関数であることが分かる。

問２．演算子 $\hat{A},\ \hat{B}$ について以下の問に答えよ。

1) $\hat{A},\ \hat{B}$ は必ずしも線形演算子でなくとも良いが、常に $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2 = \left(\hat{B}+\hat{A}\right)^2$ が成り立つことを示せ。

2) $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2 = \hat{A}^2 + 2\,\hat{A}\,\hat{B} + \hat{B}^2$ が成り立つ為の条件を示せ。

1)

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2 f(x) = \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(\hat{A}+\hat{B}\right) f(x)$$
$$= \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(\hat{A}\,f(x) + \hat{B}\,f(x)\right)$$
$$= \hat{A}^2\,f(x) + \hat{A}\,\hat{B}\,f(x) + \hat{B}\,\hat{A}\,f(x) + \hat{B}^2\,f(x)$$
$$= (\,\hat{A}^2 + \hat{A}\,\hat{B} + \hat{B}\,\hat{A} + \hat{B}^2\,)\,f(x)$$

よって

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2 = \hat{A}^2 + \hat{A}\,\hat{B} + \hat{B}\,\hat{A} + \hat{B}^2 \qquad (1\text{-}1)$$

同様にして

$$\left(\hat{B}+\hat{A}\right)^2 = \left(\hat{B}+\hat{A}\right)\left(\hat{B}+\hat{A}\right) = \hat{B}^2 + \hat{B}\,\hat{A} + \hat{A}\,\hat{B} + \hat{A}^2$$

全ての項が同じであるので$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2=\left(\hat{B}+\hat{A}\right)^2$である。

2)　(1-1) が$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2=\hat{A}^2+2\hat{A}\hat{B}+\hat{B}^2$と等しいときには
$\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=2\hat{A}\hat{B}$であるから、
$\hat{A}\hat{B}=\hat{B}\hat{A}$　即ち演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ が可換であればよい。

問３．演算子 $\hat{A}$，$\hat{B}$が以下の様に与えられたとき $\hat{A}^2$，$\hat{B}^2$，$\hat{A}\hat{B}$及び$\hat{B}\hat{A}$を書き下せ。

$$\hat{A}=x\frac{d}{dx}-1 \qquad \hat{B}=\frac{d^2}{dx^2}+x^2\frac{d}{dx}+1$$

$f(x)$に演算することに注意。

微分演算子の演算

$$\frac{d}{dx}g(x)\ f(x)=\frac{dg(x)}{dx}\ f(x)+g(x)\frac{d\ f(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x)\ f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dg(x)}{dx}\ f(x)+g(x)\frac{d\ f(x)}{dx}\right)$$
$$=\frac{d^2g(x)}{dx^2}\ f(x)+\frac{dg(x)}{dx}\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}\frac{df(x)}{dx}+g(x)\frac{d^2\ f(x)}{dx^2}$$
$$=\frac{d^2g(x)}{dx^2}\ f(x)+2\frac{dg(x)}{dx}\frac{df(x)}{dx}+g(x)\frac{d^2\ f(x)}{dx^2}$$

第２項に注意

$$\hat{A}\ f(x)=\left(x\frac{d}{dx}-1\right)f(x)=x\frac{df}{dx}-f$$

$$\hat{A}^2\ f(x)=\hat{A}\{\hat{A}\ f(x)\}=\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\left(x\frac{df}{dx}-f\right)$$
$$=x\frac{d}{dx}x\frac{df}{dx}+x^2\frac{d^2f}{dx^2}-x\frac{d}{dx}f-x\frac{df}{dx}+f$$
$$=\left\{x^2\frac{d^2f}{dx^2}-x\frac{df}{dx}+f\right\}$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{2} = \{\, x^{2}\frac{d^{2}}{dx^{2}} - x\frac{d}{dx} + 1 \,\}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}\, f(x) = \left(\frac{d^{2}}{dx^{2}} + x^{2}\frac{d}{dx} + 1\right) f(x) = \frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x^{2}\frac{df}{dx} + f$$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}}\, f(x) &= \left(x\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x^{2}\frac{df}{dx} + f\right) \\
&= x\frac{d^{3} f}{dx^{3}} + x\; 2x\frac{df}{dx} + x^{3}\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x\frac{df}{dx} - \frac{d^{2} f}{dx^{2}} - x^{2}\frac{df}{dx} - f \\
&= x\frac{d^{3} f}{dx^{3}} + (x^{3} - 1)\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + (x^{2} + x)\frac{df}{dx} - f
\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}} = x\frac{d^{3}}{dx^{3}} + (x^{3} - 1)\frac{d^{2}}{dx^{2}} + (x^{2} + x)\frac{d}{dx} - 1$$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}\, f(x) &= \left(\frac{d^{2}}{dx^{2}} + x^{2}\frac{d}{dx} + 1\right)\left(x\frac{df}{dx} - f\right) \\
&= x\frac{d^{3} f}{dx^{3}} + 2\cdot 1\frac{d^{2} f}{dx^{2}} - \frac{d^{2}}{dx^{2}} f + x^{2}\frac{df}{dx} + x^{3}\frac{d^{2} f}{dx^{2}} - x^{2}\frac{df}{dx} + x\frac{df}{dx} - f \\
&= x\frac{d^{3} f}{dx^{3}} + (x^{3} + 1)\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x\frac{df}{dx} - f
\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}} = x\frac{d^{3}}{dx^{3}} + (x^{3} + 1)\frac{d^{2}}{dx^{2}} + x\frac{d}{dx} - 1$$

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{B}}^{2} f(x) &= \left(\frac{d^{2}}{dx^{2}} + x^{2}\frac{d}{dx} + 1\right)\left(\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x^{2}\frac{df}{dx} + f\right) \\
&= \frac{d^{4} f}{dx^{4}} + \left(2\frac{df}{dx} + 2\cdot 2x\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x^{2}\frac{d^{3} f}{dx^{3}}\right) + \frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x^{2}\frac{d^{3} f}{dx^{3}} \\
&\qquad + x^{2}\left(2x\frac{df}{dx} + x^{2}\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + \frac{df}{dx}\right) + \frac{d^{2} f}{dx^{2}} + x^{2}\frac{df}{dx} + f \\
&= \frac{d^{4} f}{dx^{4}} + 2x^{2}\frac{d^{3} f}{dx^{3}} + (x^{4} + 4x + 2)\frac{d^{2} f}{dx^{2}} + 2(x^{3} + x^{2} + 1)\frac{df}{dx} + f
\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}^{2} = \frac{d^{4}}{dx^{4}} + 2x^{2}\frac{d^{3}}{dx^{3}} + (x^{4} + 4x + 2)\frac{d^{2}}{dx^{2}} + 2(x^{3} + x^{2} + 1)\frac{d}{dx} + 1$$