

宿題 9

解答例

問 1 . 慣性モーメントが $I = \mu r^2$ と表せることを示せ。 .

質量中心ということから

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (3-1)$$

$$r = r_1 + r_2 = r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} r_1 \quad (3-2)$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (3-1) \text{ を代入}$$

$$= m_1 r_1^2 + m_1 r_1 r_2 \quad (3-2) \text{ より}$$

$$= m_1 r_1 r = m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} r r = \mu r^2$$

が得られる。

問 2 . 平面極座標の (3) 式と (4) 式に偏微分の連鎖規則を適応して $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ を求め、

もう一度偏微分の連鎖規則を適応して $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ を求めよ。授業の結果と合わせて

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ を求めよ。}$$

平面極座標

$$d\theta = r d\phi, \quad dS = r d\theta dr$$

$$\text{円周} = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$$

$$\text{面積} S = \int_0^r r dr d\theta = \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^r = \pi r^2$$

$$x = r \cos \theta \quad (1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$\tan \theta = y / x \quad (4)$$

偏微分の連鎖規則

$$\left(\frac{f}{x}\right)_y = \left(\frac{f}{r}\right)\left(\frac{r}{x}\right)_y + \left(\frac{f}{r}\right)_r\left(\frac{r}{x}\right)_y$$

$$\left(\frac{f}{y}\right)_x = \left(\frac{f}{r}\right)\left(\frac{r}{y}\right)_x + \left(\frac{f}{r}\right)_r\left(\frac{r}{y}\right)_x$$

(3) 式の両辺を x で微分する

$$\frac{1}{x} r^2 = 2r \frac{r}{x} = \frac{r}{x} (x^2 + y^2) = 2x, \quad \frac{r}{x} = \frac{x}{r} = \frac{r \cos}{r} = \cos$$

$$y \text{ も同様にして } \frac{r}{y} = \frac{y}{r} = \frac{r \sin}{r} = \sin$$

(4) 式より

$$\frac{1}{x} \tan = \frac{1}{\cos^2} \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \frac{y}{x} = \frac{-y}{x^2} = -\frac{r \sin}{r^2 \cos^2}, \quad \frac{1}{x} = -\frac{\sin}{r}$$

$$\text{同様にして } \frac{1}{\cos^2} \frac{1}{y} = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{y} = \frac{\cos^2}{r \cos} = \frac{\cos}{r}$$

まとめると

$$\frac{f}{x} = \frac{f}{r} \cos + \frac{f}{r} \frac{-\sin}{r}, \quad \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{r} - \frac{\sin}{r} \frac{1}{r}$$

$$\frac{f}{y} = \frac{f}{r} \sin + \frac{f}{r} \frac{\cos}{r}, \quad \frac{1}{y} = \sin \frac{1}{r} + \frac{\cos}{r} \frac{1}{r}$$

2階微分についてはホームページのノート lesson9a.pdf を参照下さい。