宿題５　　　　　　　　　　　　提出期限　５月１４日

問１．次の関数を指定した領域で規格化せよ（α＞０）

a)	$e^{i\theta}\ (\equiv \cos\theta + i\sin\theta)$	$0 \le \theta \le 2\pi$
b)	$e^{-\alpha x}$	$0 \le x < \infty$
c)	$e^{-\alpha x^2}$	$0 \le x < \infty$
d)	$x\,e^{-\alpha x}$	$0 \le x < \infty$
e)	$x\,e^{-\alpha x^2}$	$0 \le x < \infty$

c) の積分では $\sqrt{2\alpha}\,x = X$ と変数を置き換え、また $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを用いるとよい。　d) は部分積分を繰り返せばよい。

e) では $\frac{d}{dx}e^{-2\alpha x^2} = -4\alpha x\,e^{-2\alpha x^2}$ を用いて部分積分した後 c) の結果を使う。

問２．長方形の箱 $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$ の中で運動するように制限された自由粒子の固有関数は

$$\psi(x, y) = A \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad \begin{array}{l} n = 1, 2, \cdots \\ m = 1, 2, \cdots \end{array}$$

と書ける。この系のハミルトニヤンは $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

である。

1) 規格化定数 A を求めよ。
2) この系が固有状態の１つにある時 $\sigma_E^2 = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = 0$ であることを示せ。
3) 位置の平均値 $\langle \hat{r} \rangle$ を求めよ。ここに $\hat{r} = i\,x + j\,y$ である。
4) 位置の二乗の平均値 $\langle r^2 \rangle$ 及び位置の分散 σ_r^2 を求めよ。
   ここに $r^2 = x^2 + y^2$ である。
5) 二次元の運動量演算子は $\hat{p} = -i\hbar\left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y}\right)$ である。$\langle p\rangle$ 及び σ_p^2 を求めよ。
6) この系において異なる固有値に属する固有関数は直交することを示せ。

問３．ψ_n と ψ_m が共にハミルトニヤン $\hat{H}$ の定常状態であれば次の波動関数が時間に依存するシュレーディンガー方程式を満たすことを示せ。

$$\Psi(x, t) = c_m\psi_m(x)\,e^{-iE_m t/\hbar} + c_n\psi_n(x)\,e^{-iE_n t/\hbar}$$