宿題６　　　　　　　　　　　　　提出期限　５月２１日

問１．演算子 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ について次の交換関係を証明せよ

1) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}]$

2) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

問２．次の演算子がエルミート演算子であるかどうかを確かめよ

$$x,\quad \frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

問３．軌道角運動量について以下の問に答えよ。

$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ を x，y，z 方向の単位ベクトルとすると位置は $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ と、運動量は $\boldsymbol{p} = \mathbf{i}\,p_x + \mathbf{j}\,p_y + \mathbf{k}\,p_z = -i\hbar\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ とまた角運動量は $\boldsymbol{L} = \mathbf{i}L_x + \mathbf{j}L_y + \mathbf{k}L_z$ と表せる。角運動量は $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ で定義される。

1) 角運動量の各成分を求めよ。

2) 角運動量に対する交換関係を示せ。

$[L_x, L_y]$，　$[L_y, L^2]$，　$[L_z, L_\pm]$，　$[L^2, L_\pm]$

ただし　$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$，　$L_\pm = L_x \pm iL_y$　である。

問４．時間を含むシュレーディンガー方程式は

$$\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$$

と表せる。１粒子のハミルトニアンは次式で示される

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

s を時間を含まない物理量とし、$\hat{S}$ をその演算子とするとき

$$\frac{d}{dt}\langle s\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H}, \hat{S}]\rangle$$

と成ることを示せ。この関係を用いて次の関係式を示せ。

$$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt} = \frac{1}{m}\langle x\hat{p}_x + \hat{p}_x x\rangle$$

また $\hat{F}$ を力の演算子としてニュートン運動方程式に相当する式を導け。

$$\frac{d\langle p_x\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\rangle = \langle f\rangle$$

xの分散の時間微分が次式で示されることを導け。

$$\frac{d}{dt}\sigma_x^2 = \frac{1}{m}\langle x\hat{p}_x + \hat{p}_x x\rangle - \frac{2}{m}\langle x\rangle\langle\hat{p}_x\rangle$$