二次元の波動方程式
四辺固定の膜（四角い太鼓）

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{v^2\partial t^2} \qquad (2.28)$$

境界条件

$$u(0,y,t)=u(a,y,t)=0$$
$$u(x,0,t)=u(x,b,t)=0 \quad \text{全ての } t \text{ に対して} \qquad (2.29)$$

$u(x,y,t)$ を次のように因数分解できると仮定して解く

$$u(x,y,t)=X(x)\,Y(y)\,T(t) \qquad (2.30)$$

（2.30）式を（2.28）式に入れて全体を（2.30）式で割ると

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(x)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=\frac{1}{v^2\,T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=K$$

位置だけの関数と時間だけの関数が常に等しく成り立つためには定数である場合に限られる。分離定数を K と置いた。一次元の場合から K が負である時意味のある解が得られると予測されるので、実数 k を $K=-k^2$ と置いて整理すると。

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2}+k^2v^2\,T(t)=0 \qquad (2.32)$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+k^2=0 \qquad (2.34)$$

x だけの関数と y だけの関数が常に（2.34）式を満たすためには互いが定数である場合で

$$k^2=p^2+q^2 \qquad (2.37)$$

と置いて解く。

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+p^2X(x)=0 \qquad (2.38)$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+q^2Y(y)=0 \qquad (2.39)$$

一次元の場合と同様にして次の一般解を得る。

$$X(x)=A\cos px+B\sin px \qquad (2.40)$$

$$Y(y) = C\cos qx + D\sin qx \qquad (2.41)$$

境界条件は

$X(0)Y(y) = X(a)Y(y) = 0$ yによらずに成立するためには

$X(0) = X(a) = 0$ これより $A = 0$ 及び $pa = n\pi$ を得る。よって

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi x}{a} \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (2.43)$$

y についても同様にして

$$Y(y) = D\sin\frac{m\pi y}{b} \quad m = 1, 2, \cdots \qquad (2.44)$$

を得る。（2.37）式に p, q を入れて

$$k_{nm} = \pi\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad n = 1, 2, \cdots, m = 1, 2, \cdots \qquad (2.45)$$

t による部分は一次元と全く同じで

$$T_{nm}(t) = E_{nm}\cos\omega_{nm}t + F_{nm}\sin\omega_{nm}t \qquad (2.46)$$

$$\omega_{nm} = k_{nm}v = \pi v\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^{1/2} \qquad (2.47)$$

位相角を用いると

$$T_{nm}(t) = G_{nm}\cos(\omega_{nm}t + \phi_{nm}) \qquad (2.48)$$

解は各モードの和として表せる

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x, y, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\cos(\omega_{nm}t + \phi_{nm})\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} \qquad (2.49)$$

一次元では節点が現れたが二次元では振動しない線、節線が現れる。

$a = b$ の場合には基準モードの振動数は

$$\omega_{nm} = \frac{\pi v}{a}(n^2 + m^2)^{1/2} \qquad (2.50)$$

となる。この場合 n と m を入れ替えたモード u_{nm} と u_{mn} とは同じ振動数を持つようになる。これを縮退（縮重）という。

２００２年の宿題とその解答例を以下に添えるので参考にして欲しい。

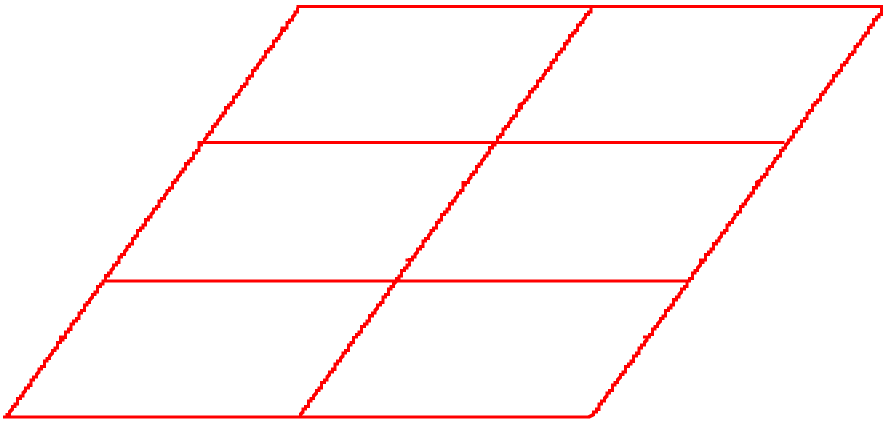
宿題３（２００２年度）

問１．教科書にならって正方形膜の u_{13}, u_{23}, u_{33} 基準モードを書きなさい。教科書及びこのページの図２．７を参照して縮重を指摘しなさい。

解答例

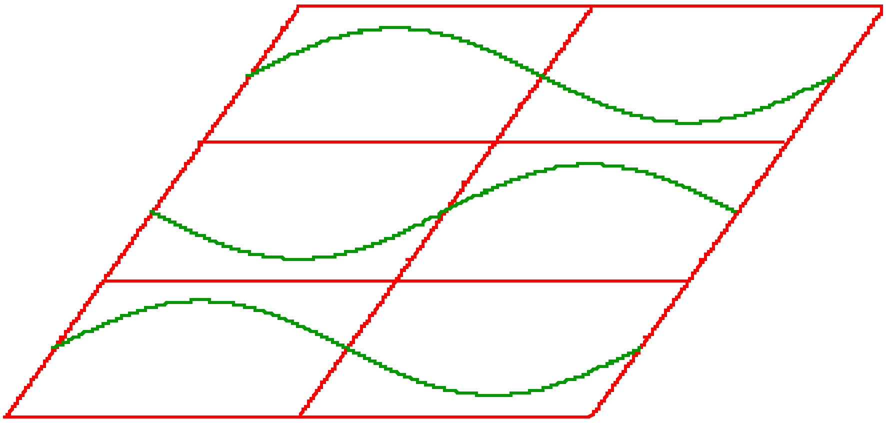
幕の基準振動 u_{23} を書くにはｘ軸を２等分する節線を引き続いてｙ軸を３等分する節線を引く。

以下の図では原点を左下に置きｘ軸を水平方向にとった。教科書の記述とは軸の取り方に違いがある（ホームページの図とは同じ軸の取り方となっていることに注意。）

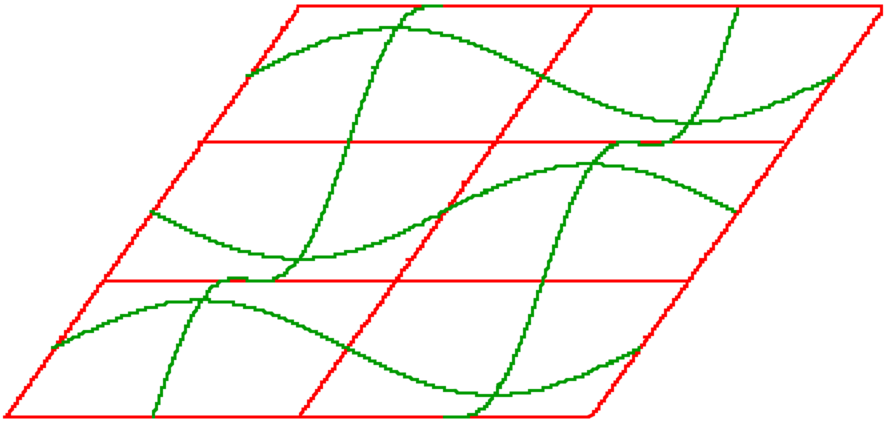


つぎに各節線間に

$\boldsymbol{u} = (\sin 2\pi \boldsymbol{x})(\sin 3\pi \boldsymbol{y})$　$\boldsymbol{x}: 0 \sim 1$，　$\boldsymbol{y} = 1/6, 1/2, 5/6$ として正弦波を書く

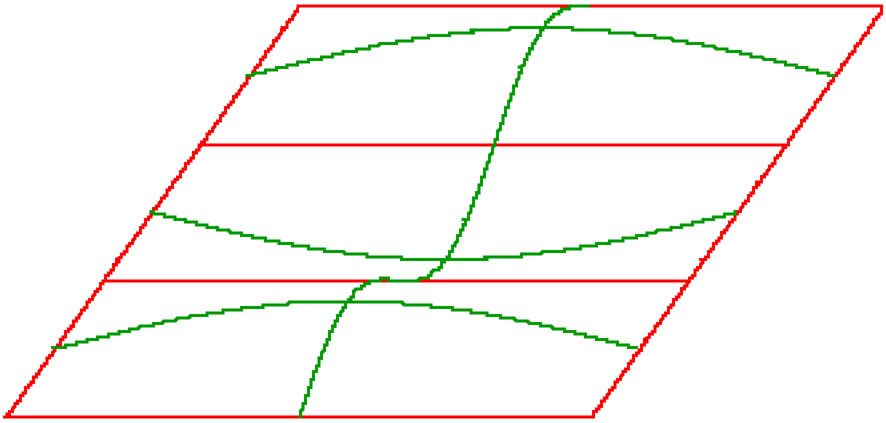


同様にして $\boldsymbol{u} = (\sin 2\pi \boldsymbol{x})(\sin 3\pi \boldsymbol{y})$　$\boldsymbol{x} = 1/4, 3/4$,　$\boldsymbol{y}: 0 \sim 1$ として正弦波を書く



これでだいたいの感じがつかめるであろう。これはu_{32}とモードと縮重している。
同様にして描いた。u_{13}と u_{33}を示す。

u_{13}



この基準モードは u_{31}と縮重している。

u_{33}